



ce  
pre  
UNI

**TEORÍA**

# Geometría

**SIMETRÍA EN EL ESPACIO**

**CICLO  
PRE  
2024 - 1**

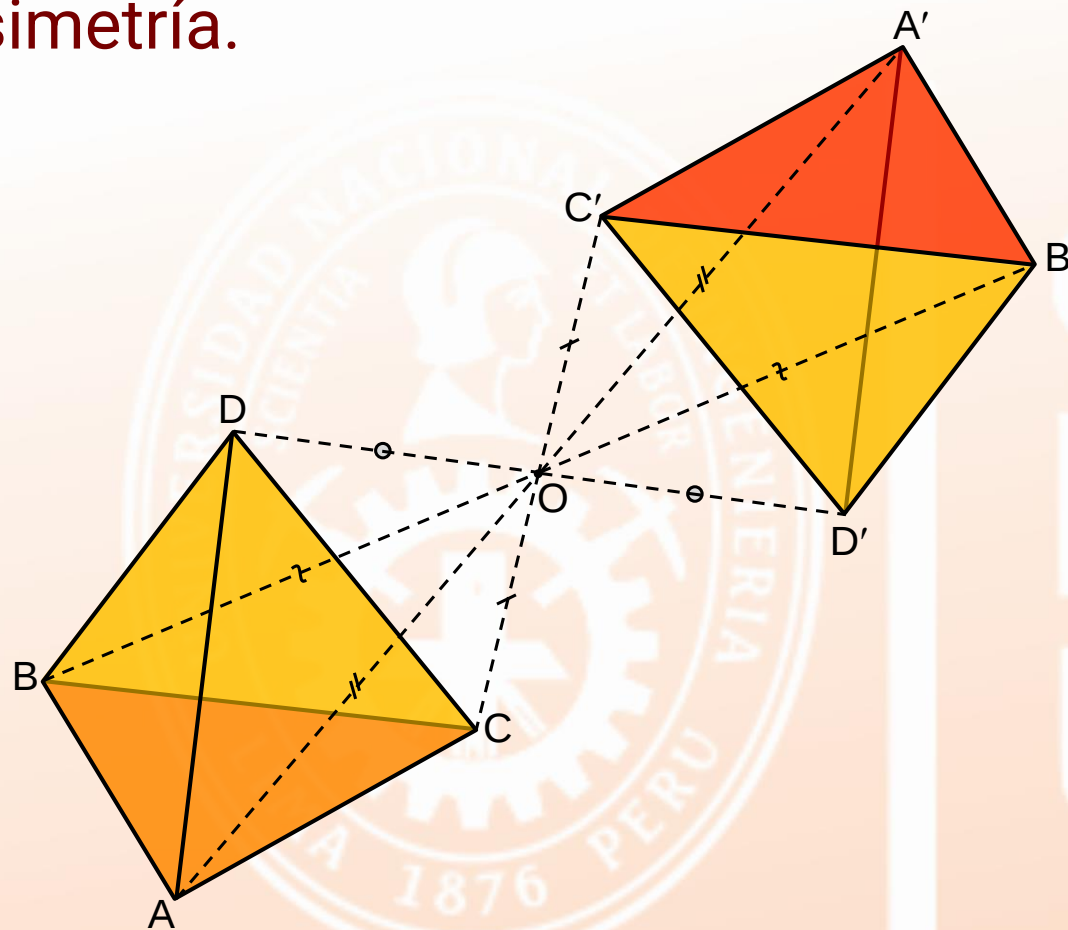


# SIMETRÍA CON RESPECTO DE UN PUNTO

**Definición.-** Dos figuras geométricas son simétricas con respecto a un punto denominado centro de simetría, si cada punto de una de las figuras tiene su simétrico en la otra figura con respecto al punto, denominado centro de simetría.

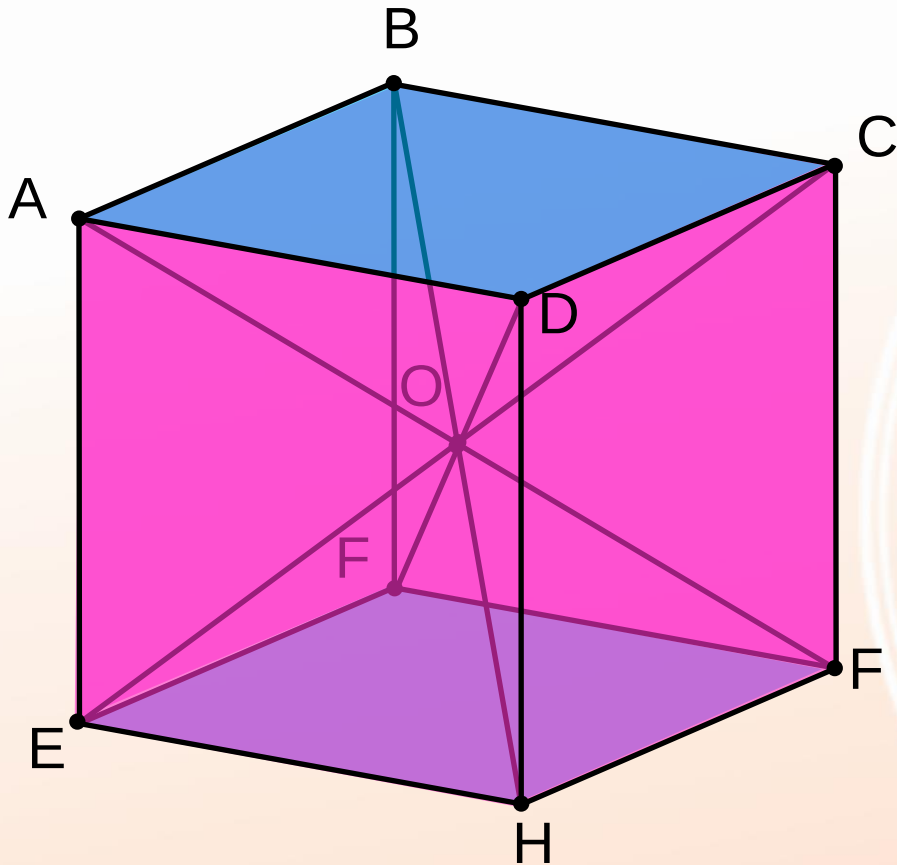
Los tetraedros  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  son simétricos con respecto al punto  $O$ .

$O$  es centro de simetría.



# CENTRO DE SIMETRÍA DE UNA FIGURA GEOMÉTRICA

**Definición.-** Una figura geométrica es simétrica con respecto a un punto denominado centro de simetría, si cada punto de la figura tiene su simétrico en la misma figura con respecto al centro de simetría.



El hexaedro regular ABCD – EFGH es simétrico respecto del punto de intersección de las diagonales.

El punto O es centro de simetría.

**Observación.-** Con excepción del tetraedro regular, todos los demás poliedros regulares tienen centro de simetría.

## PROBLEMA 01

Sean ABCD y BCEF dos cuadrados contenidos en planos perpendiculares de modo que el punto Q es el simétrico de F respecto del centro del cuadrado ABCD. Si  $AB = 1$  u, entonces el área (en  $u^2$ ) de la región AFCQ es

A)  $\sqrt{2}$

D)  $\sqrt{6}$

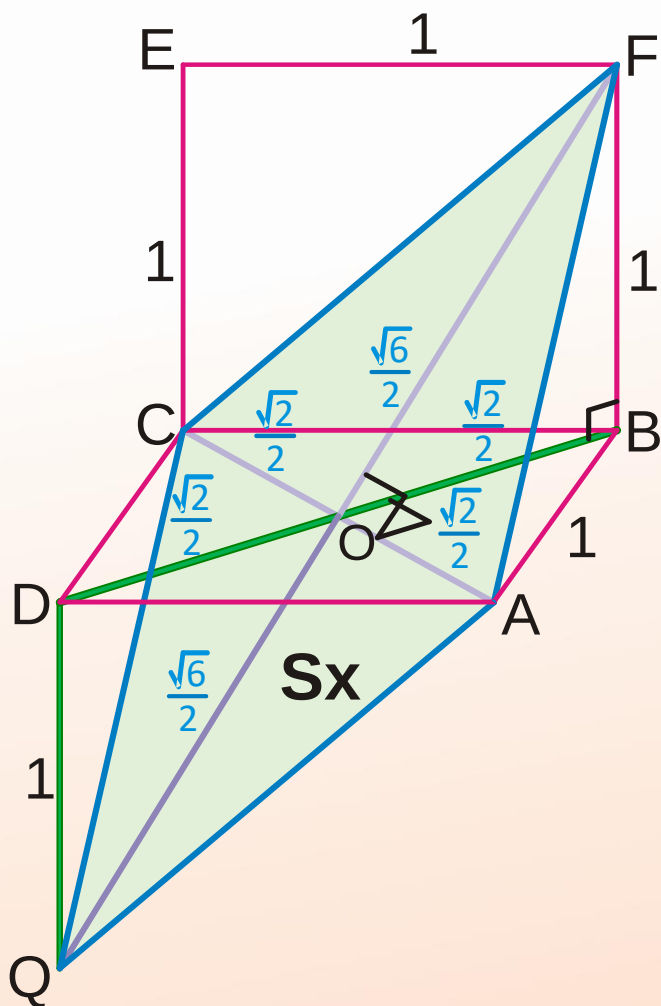
B)  $\sqrt{3}$

E) 3

C) 2

# RESOLUCIÓN 01

Sean ABCD y BCEF dos cuadrados contenidos en planos perpendiculares de modo que el punto Q es el simétrico de F respecto del centro del cuadrado ABCD. Si  $AB = 1$  u, entonces el área (en  $u^2$ ) de la región AFCQ es



Calcule  $A_{AFCQ} = S_x$

$$AO = OB = OC = OD = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangle OBF: FO = OQ = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$S_x = \frac{(AC)(FQ)}{2} = \frac{(\sqrt{2})(\sqrt{6})}{2}$$

$$\therefore S_x = \sqrt{3}$$

Clave: B

## PROBLEMA 02

En un octaedro regular la arista mide  $\ell$ . Calcule la distancia desde el centro de simetría del octaedro a una cara lateral.

A)  $\frac{\ell\sqrt{6}}{6}$

D)  $\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$

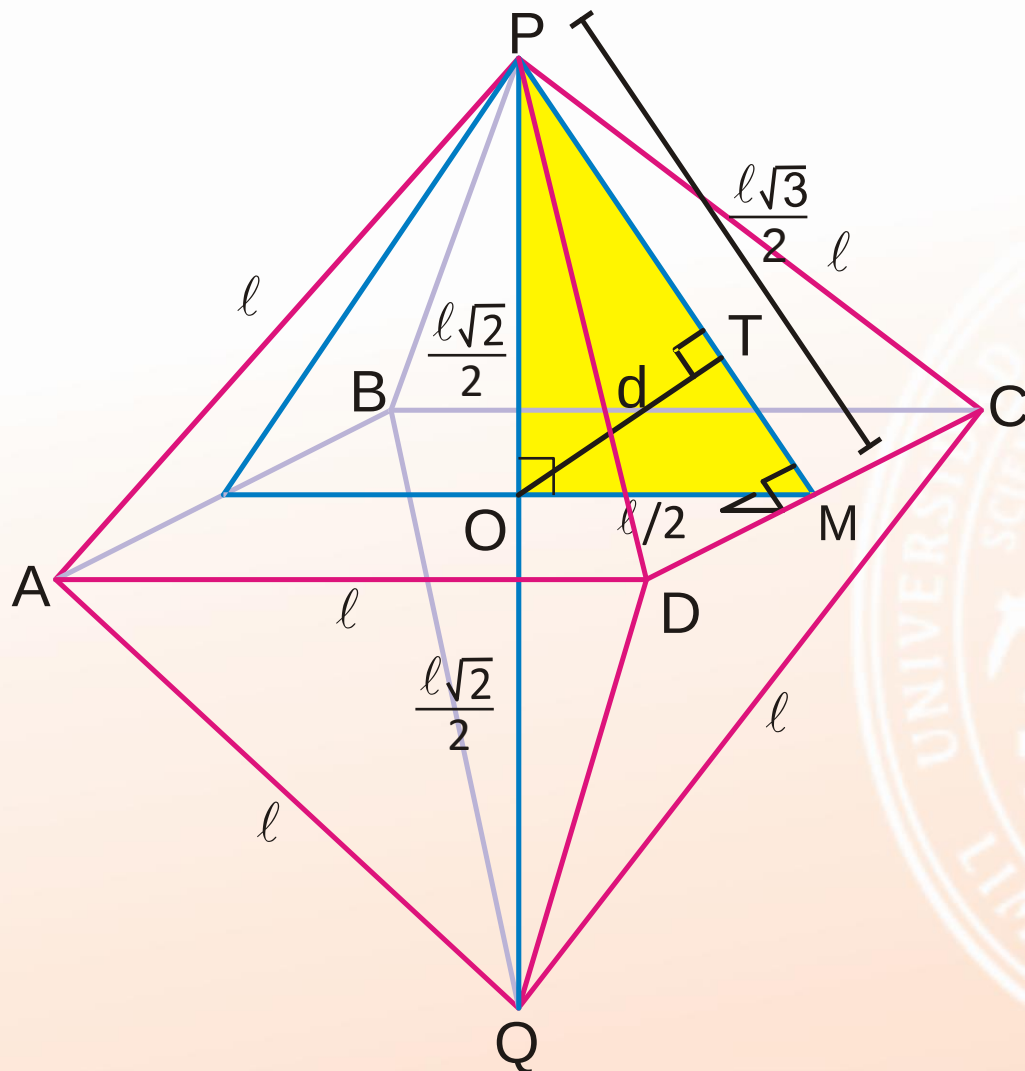
B)  $\frac{\ell\sqrt{6}}{3}$

E)  $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

C)  $\frac{\ell\sqrt{6}}{4}$

## RESOLUCIÓN 02

En un octaedro regular la arista mide  $\ell$ . Calcule la distancia del centro de simetría del octaedro a una cara lateral.



$$d(O; \Delta DPC) = OT = d$$

$$OM = \ell/2$$

$$OP = OQ = \frac{\ell}{2} \sqrt{2}$$

$$\Delta POM: MP = \frac{\ell}{2} \sqrt{3}$$

$$RM \Delta POM: \left(\frac{\ell}{2}\right) \left(\frac{\ell}{2} \sqrt{2}\right) = \left(\frac{\ell}{2} \sqrt{3}\right) (d)$$

$$\therefore d = \frac{\ell \sqrt{6}}{6}$$

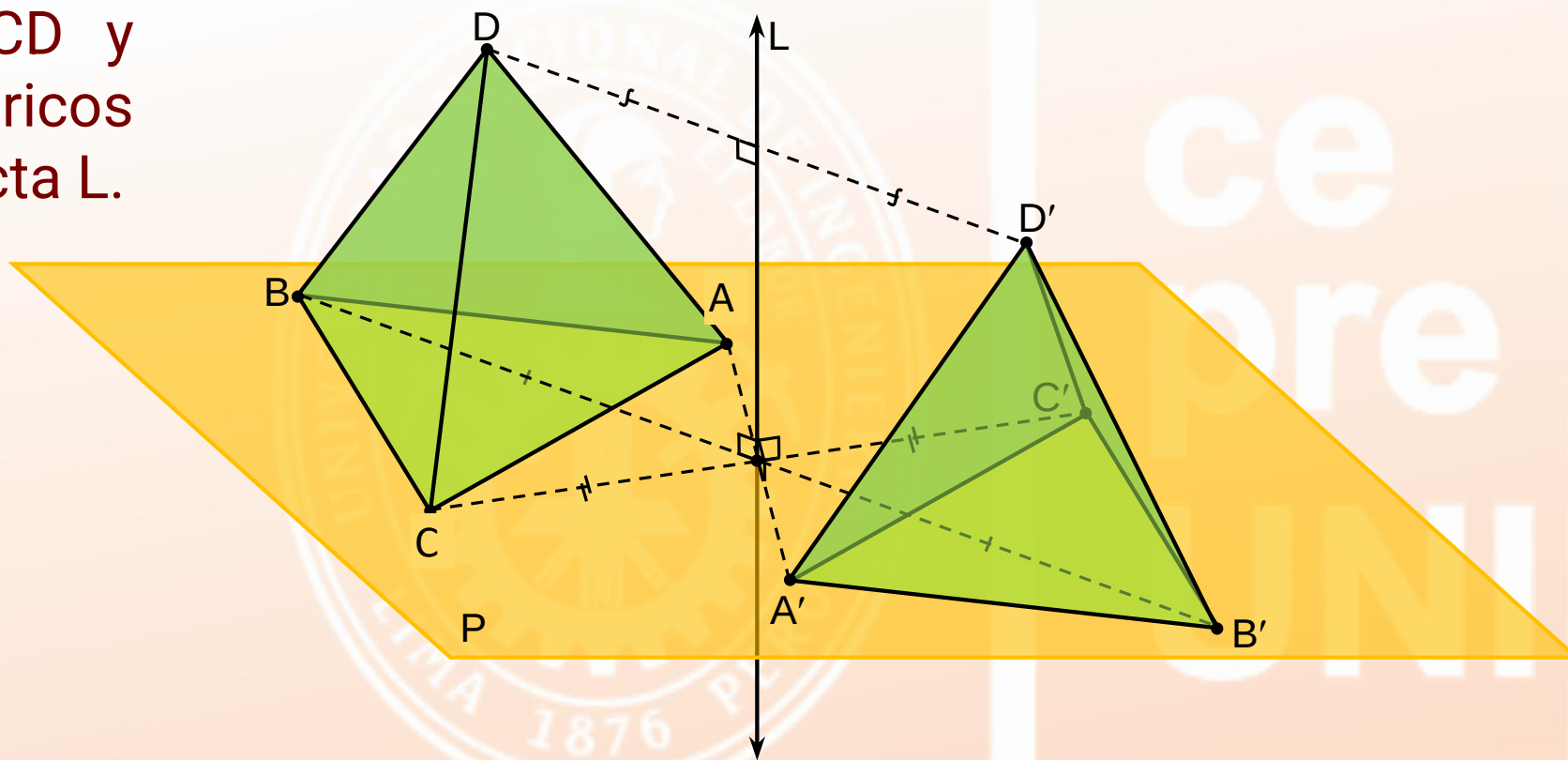
Clave: A

# SIMETRÍA RESPECTO DE UNA RECTA

**Definición.-** Dos figuras geométricas son simétricas con respecto a una recta denominado eje de simetría, si cada punto de una de las figuras tiene su simétrico en la otra figura respecto de la recta denominada eje de simetría.

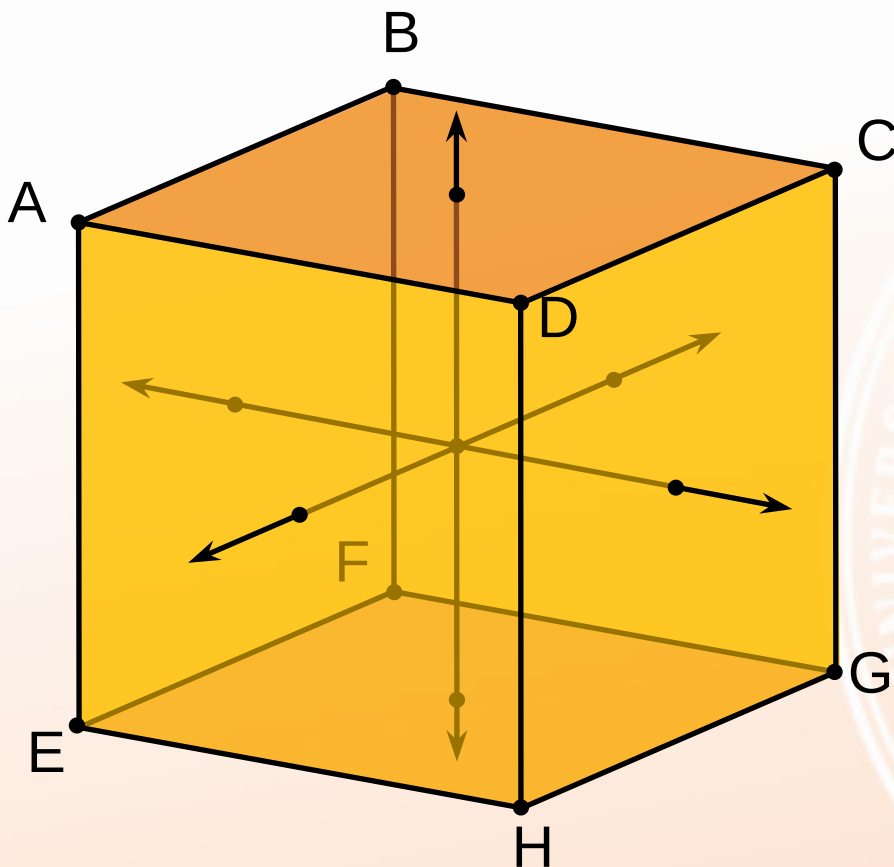
Los tetraedros  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  son simétricos con respecto a la recta  $L$ .

$L$  es Eje de simetría.



# EJE DE SIMETRÍA DE UNA FIGURA GEOMÉTRICA

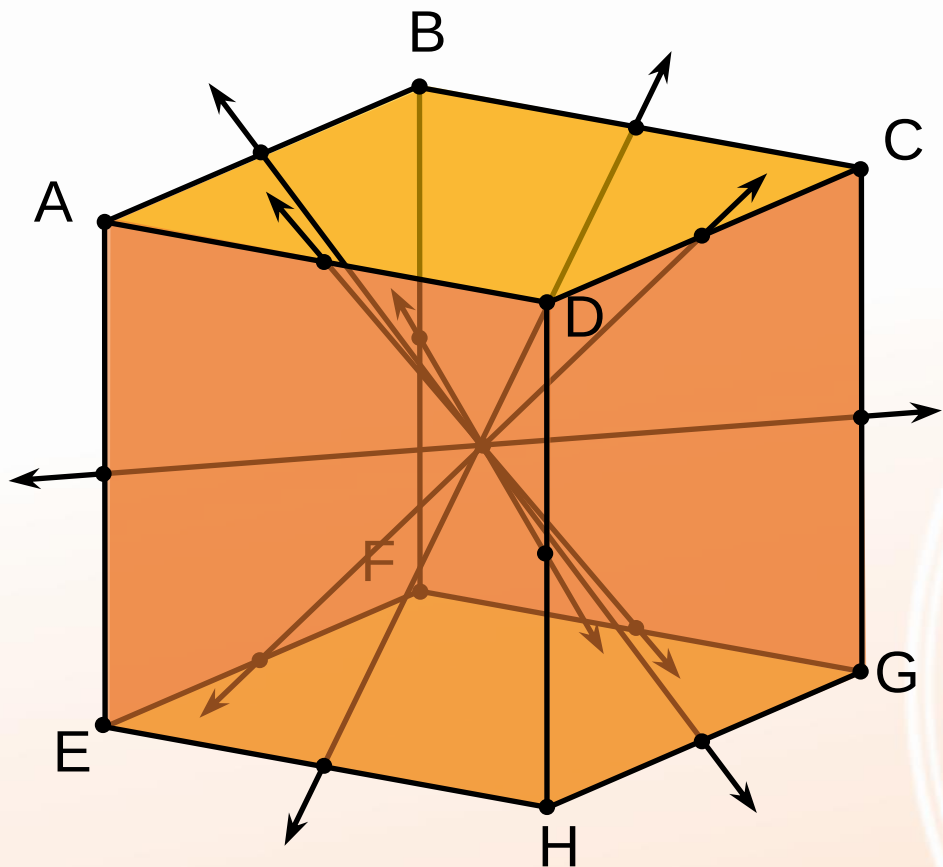
Definición.- Una figura geométrica es simétrica con respecto a una recta denominado eje de simetría, si cada punto de la figura tiene su simétrico en la misma figura con respecto al eje de simetría.



El hexaedro regular ABCD – EFGH es simétrico respecto de la recta que contiene a los centros de dos caras opuestas.

En el hexaedro regular, se muestran 3 ejes de Simetría.

# EJE DE SIMETRÍA DE UNA FIGURA GEOMÉTRICA

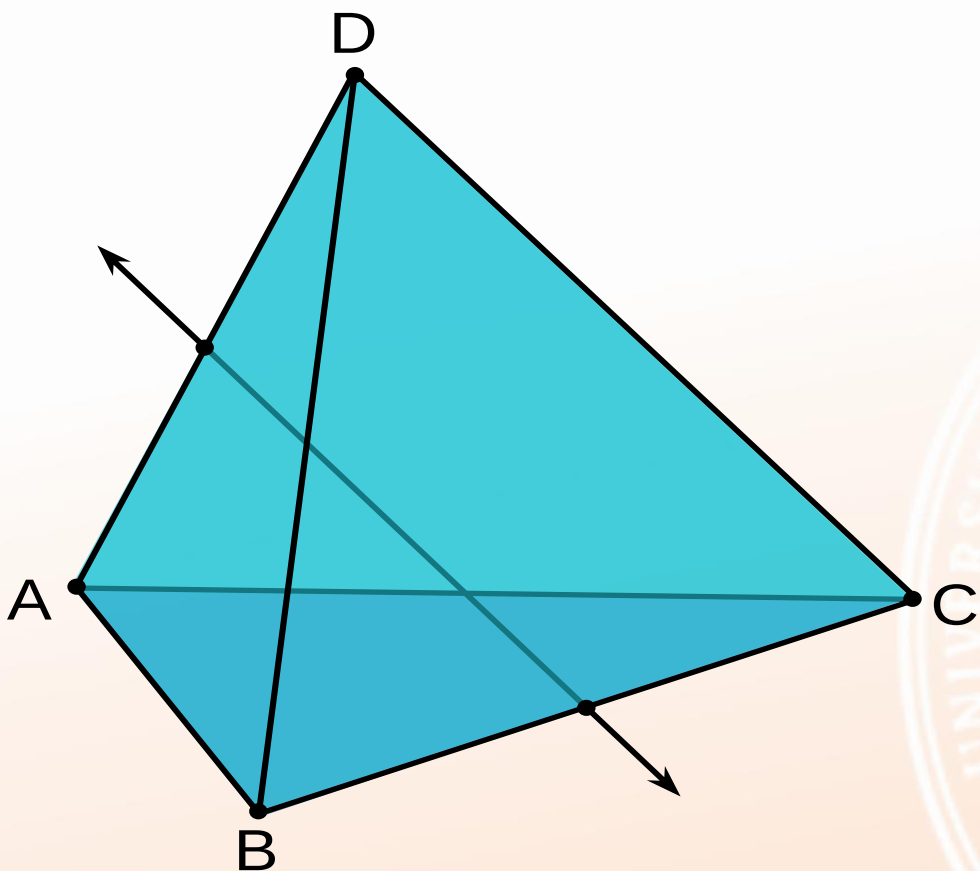


El hexaedro regular ABCD – EFGH, es simétrico con respecto de la recta que contiene a los puntos medios de dos aristas opuestas.

En el hexaedro regular, se observan 6 ejes de simetría.

El hexaedro regular tiene 9 ejes de simetría.

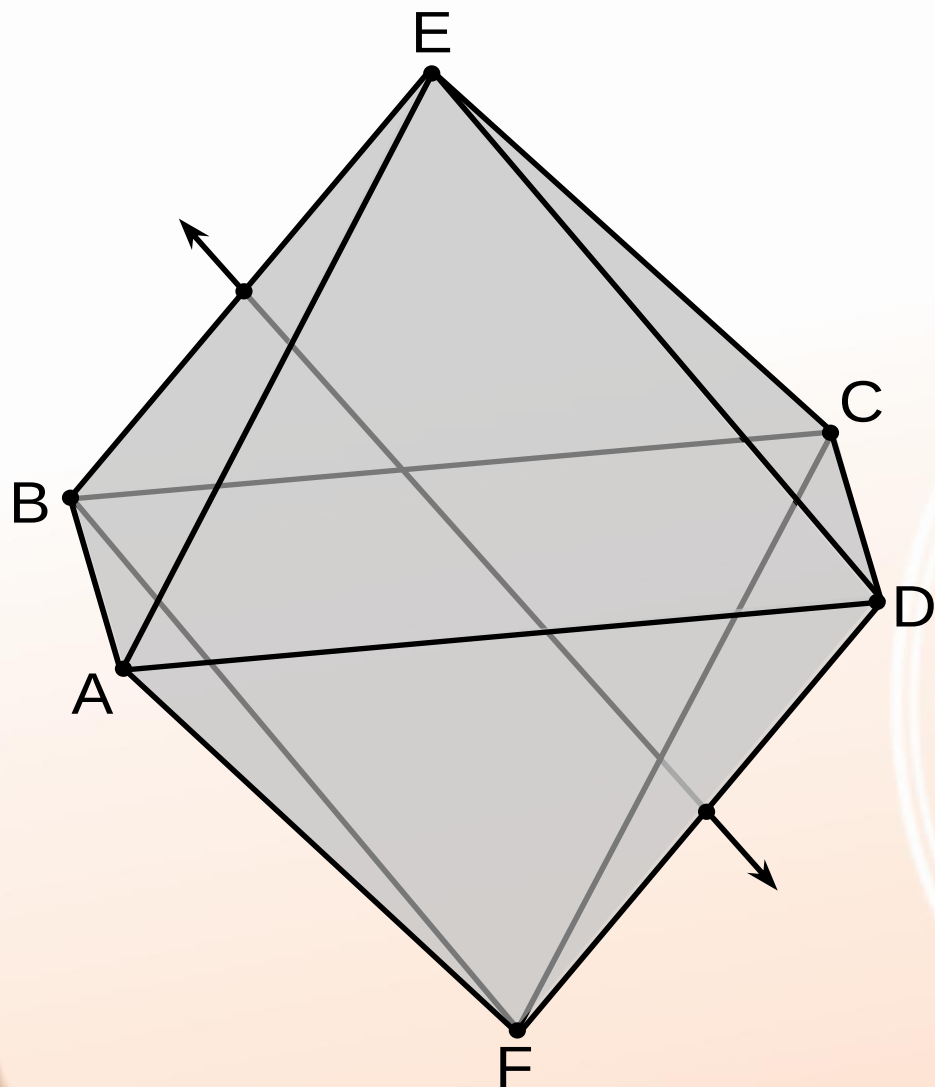
# EJE DE SIMETRÍA DE UNA FIGURA GEOMÉTRICA



El tetraedro regular ABCD, es simétrico con respecto de la recta que contiene a los puntos medios de dos aristas opuestas.

Como existen 3 pares de aristas opuestas, el tetraedro regular tiene 3 ejes de simetría.

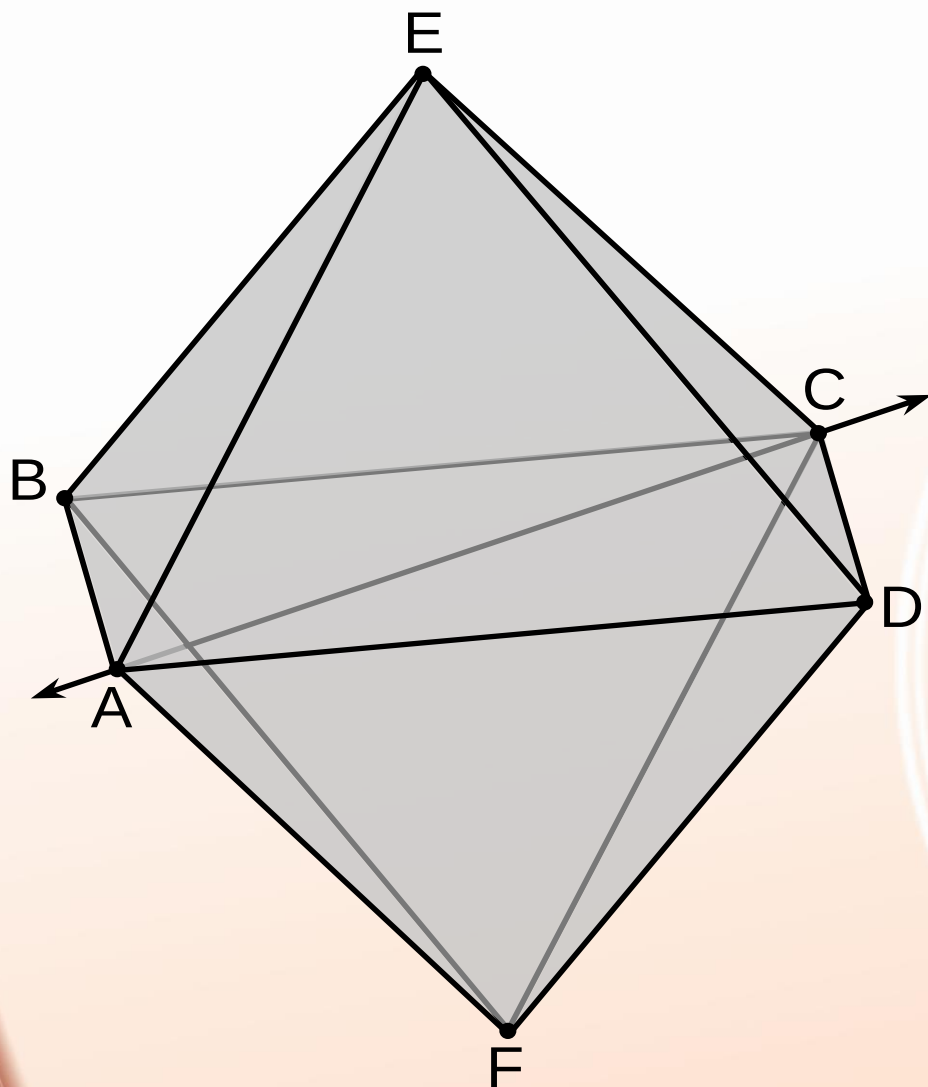
# EJE DE SIMETRÍA DE UNA FIGURA GEOMÉTRICA



El octaedro regular E-ABCD-F, es simétrico con respecto a la recta que contiene los puntos medios de dos aristas opuestas.

El octaedro regular tiene 6 pares de aristas opuestas, tiene 6 ejes de simetría.

# EJE DE SIMETRÍA DE UNA FIGURA GEOMÉTRICA



El octaedro regular E-ABCD-F, es simétrico con respecto a la recta que contiene a dos vértices opuestos.

El octaedro regular tiene 3 pares de vértices opuestos, luego tienen 3 ejes de simetría.

El octaedro regular tiene 9 ejes de simetría.

## PROBLEMAS 03

El simétrico del hexaedro regular  $ABCD-EFGH$  respecto a  $\overline{CG}$  es  $A'B'CD' - E'F'GH'$ , si las distancias entre los puntos medios de  $\overline{A'B'}$  y  $\overline{EF}$  es  $4\sqrt{6}$  u, entonces la distancia entre los centros de los hexaedros (en u) es

A) 4

B)  $4\sqrt{2}$

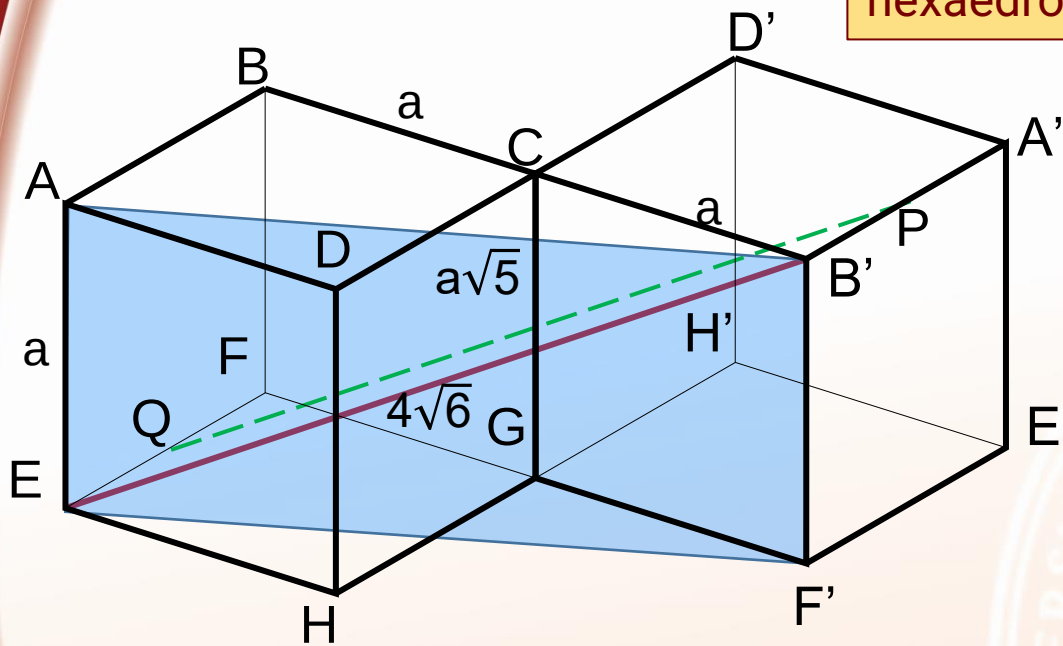
C)  $4\sqrt{3}$

D)  $3\sqrt{2}$

E)  $3\sqrt{3}$

## RESOLUCIÓN 03

El simétrico del hexaedro regular  $ABCD-EFGH$  respecto a  $\overline{CG}$  es  $A'B'CD'-E'F'GH'$ , si las distancias entre los puntos medios de  $\overline{A'B'}$  y  $\overline{EF}$  es  $4\sqrt{6}$  u, entonces la distancia entre los centros de los hexaedros (en u) es



Sean P y Q puntos medios de  $\overline{A'B'}$  y  $\overline{EF}$

Los segmentos PQ y  $B'E$  son paralelos y miden  $4\sqrt{6}$

Se Traza el rectángulo  $EAB'F'$ , luego en el triángulo rectángulo  $ABB'$ :  $EA = a$ ,  $BB' = 2a \rightarrow AB' = a\sqrt{5}$

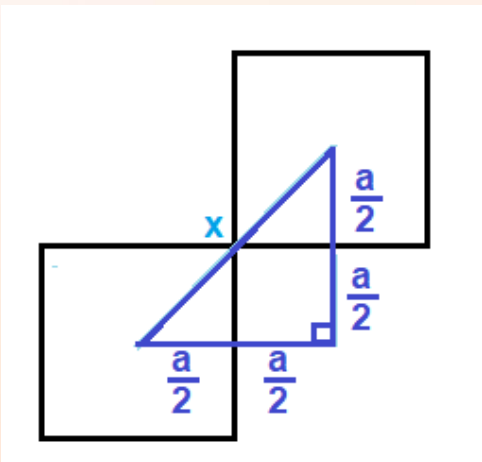
En el triángulo rectángulo  $EAB'$ :

$$EA = a, AB' = a\sqrt{5} \text{ y } EB' = a\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

$$\rightarrow a = 4$$

La distancia entre los centros de los hexaedros es  $a\sqrt{2}$

$$x = 4\sqrt{2}$$



Clave: B

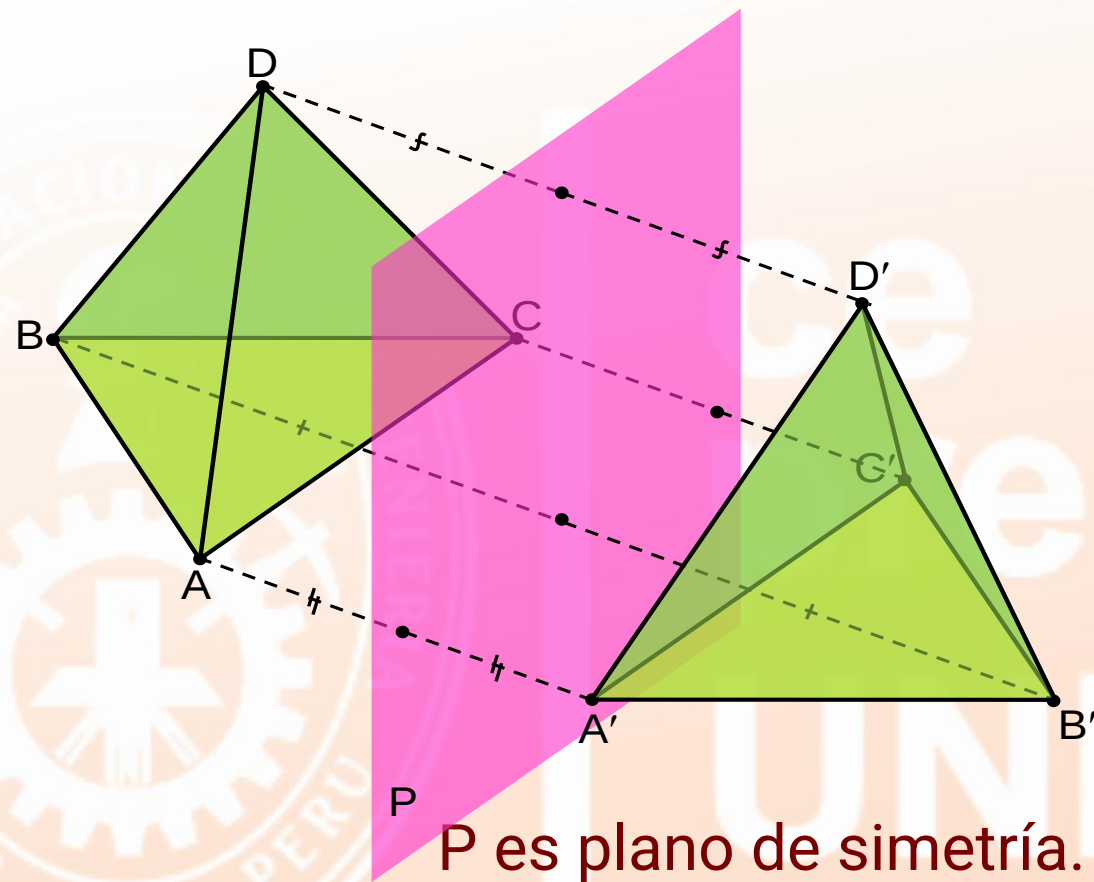
# SIMETRÍA RESPECTO DE UN PLANO

**Definición.-** Dos figuras geométricas son simétricas con respecto a un plano denominado plano de simetría, si cada punto de una de las figuras tiene su simétrico en la otra figura con respecto al plano, denominado plano de simetría.

Los tetraedros  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  son simétricos con respecto al plano  $P$ .

## Observación:

Dos puntos simétricos están contenidos en rectas perpendiculares al plano, y los segmentos que cada dos puntos simétricos determinan tienen su punto medio en el plano de simetría



## PROBLEMA 04

En un hexaedro regular ABCD-EFGH,  $AB = \ell$ . Un plano contiene a  $\overline{AE}$  y determina una sección de simetría en el hexaedro. Calcule el área de dicha sección de simetría.

A)  $\ell^2$

B)  $\ell^2\sqrt{2}$

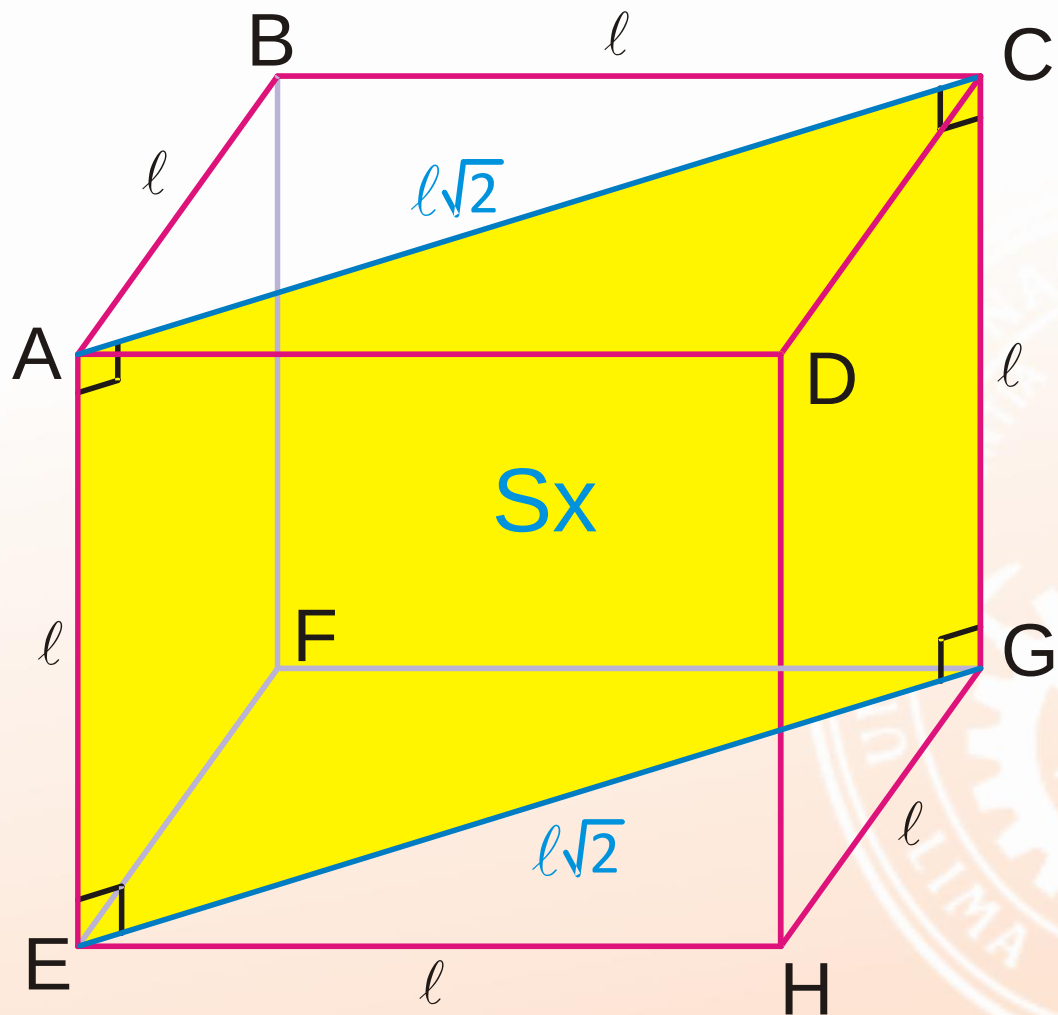
C)  $\ell^2\sqrt{3}$

D)  $2\ell^2$

E)  $\frac{\ell^2}{2}\sqrt{2}$

# RESOLUCIÓN 04

En un hexaedro regular ABCD-EFGH,  $AB = \ell$ . Un plano contiene a  $\overline{AE}$  y determina una sección de simetría en el hexaedro. Calcule el área de dicha sección de simetría.



Calcule  $A_{EACG} = S_x$

$$AC = EG = \ell\sqrt{2}$$

$$S_x = (EG)(AE)$$

Reemplazando:

$$S_x = (\ell\sqrt{2})(\ell)$$

$$\therefore S_x = \ell^2\sqrt{2}$$

Clave: B

## PROBLEMA 05

Los poliedros regulares  $P-ABCD-Q$  y  $M-CDEF-N$  son simétricos respecto a un plano que contiene a  $\overline{CD}$  perpendicular al plano que contiene a  $ABCD$  ( $P$  y  $M$  están en el mismo semiespacio determinado por  $ABCD$ ). Si la longitud de las aristas de los octaedros miden  $k$ , entonces la distancia entre los vértices  $Q$  y  $M$  es

A)  $K$

B)  $K\sqrt{2}$

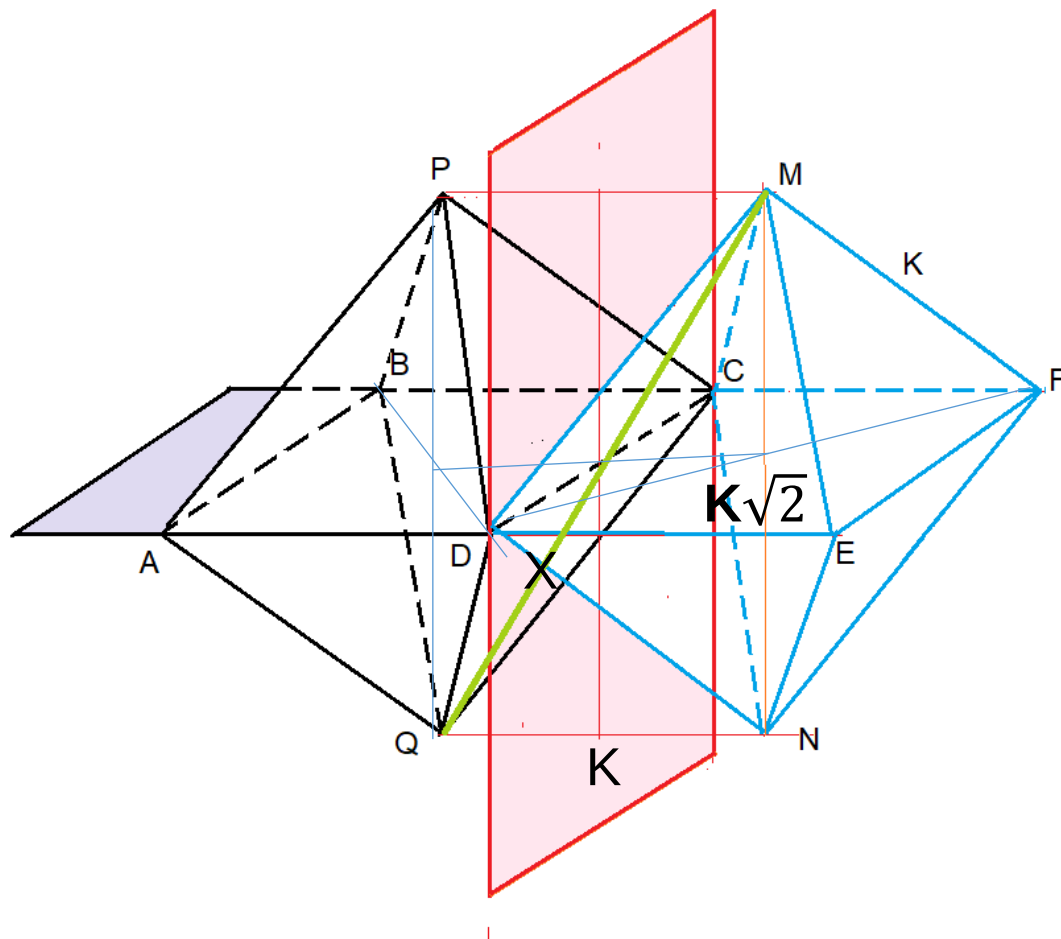
C)  $K\sqrt{5}$

D)  $K\sqrt{3}$

E)  $2K$

## RESOLUCIÓN 05

Los poliedros regulares  $P-ABCD-Q$  y  $M-CDEF-N$  son simétricos respecto a un plano que contiene a  $\overline{CD}$  perpendicular al plano que contiene a  $ABCD$  ( $P$  y  $M$  están en el mismo semiespacio determinado por  $ABCD$ ). Si la longitud de la arista mide  $k$ , entonces la distancia entre los vértices  $Q$  y  $M$  es



En el triángulo rectángulo  $QMN$ :

$$QM = x, \quad QN = k \quad \text{y} \quad MN = k\sqrt{2}$$

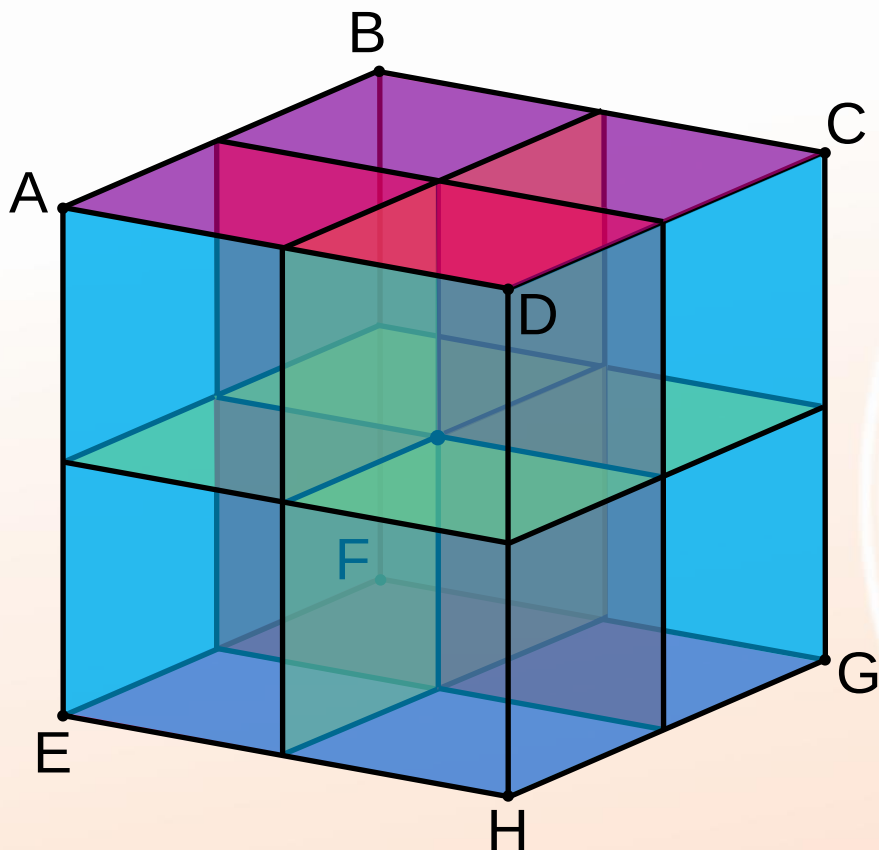
Aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo  $QMN$

$$x = QM = k\sqrt{3}$$

Clave: D

# PLANO DE SIMETRÍA DE UNA FIGURA GEOMÉTRICA

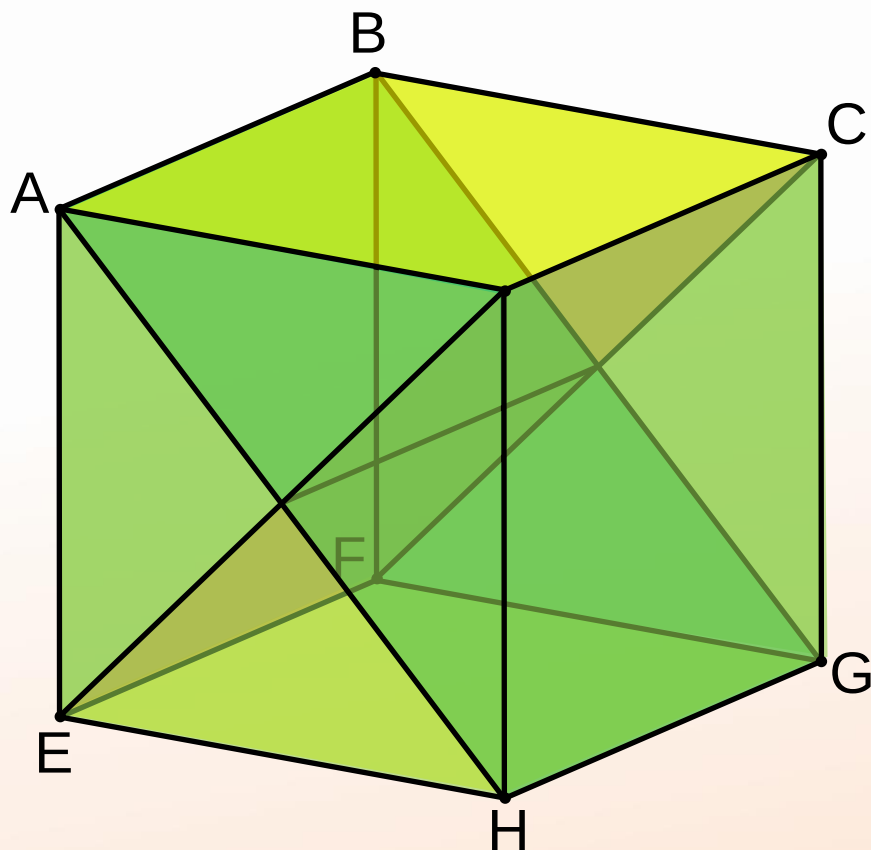
**Definición.-** Una figura geométrica es simétrica con respecto a un plano, denominado plano de simetría, si cada punto de la figura tiene su simétrico en la misma figura con respecto al plano mencionado.



El hexaedro regular ABCD – EFGH, es simétrico con respecto al plano que contiene a los puntos medios de dos pares de aristas opuestas.

El hexaedro regular ABCD-EFGH, tiene 3 planos de simetría.

# PLANO DE SIMETRÍA DE UNA FIGURA GEOMÉTRICA



El hexaedro regular ABCD – EFGH, es simétrico con respecto al plano que contiene a dos aristas opuestas.

En total hay 6 planos de simetría de este tipo.

El hexaedro regular tiene en total 9 planos de simetría.

## PROBLEMAS 06

Si la longitud de la intersección de dos tipos diferentes de planos de simetría de un hexaedro regular es  $\sqrt{6}$  u, calcule la distancia (en u) de un vértice del hexaedro a una diagonal que no la contiene.

A) 1

B) 2

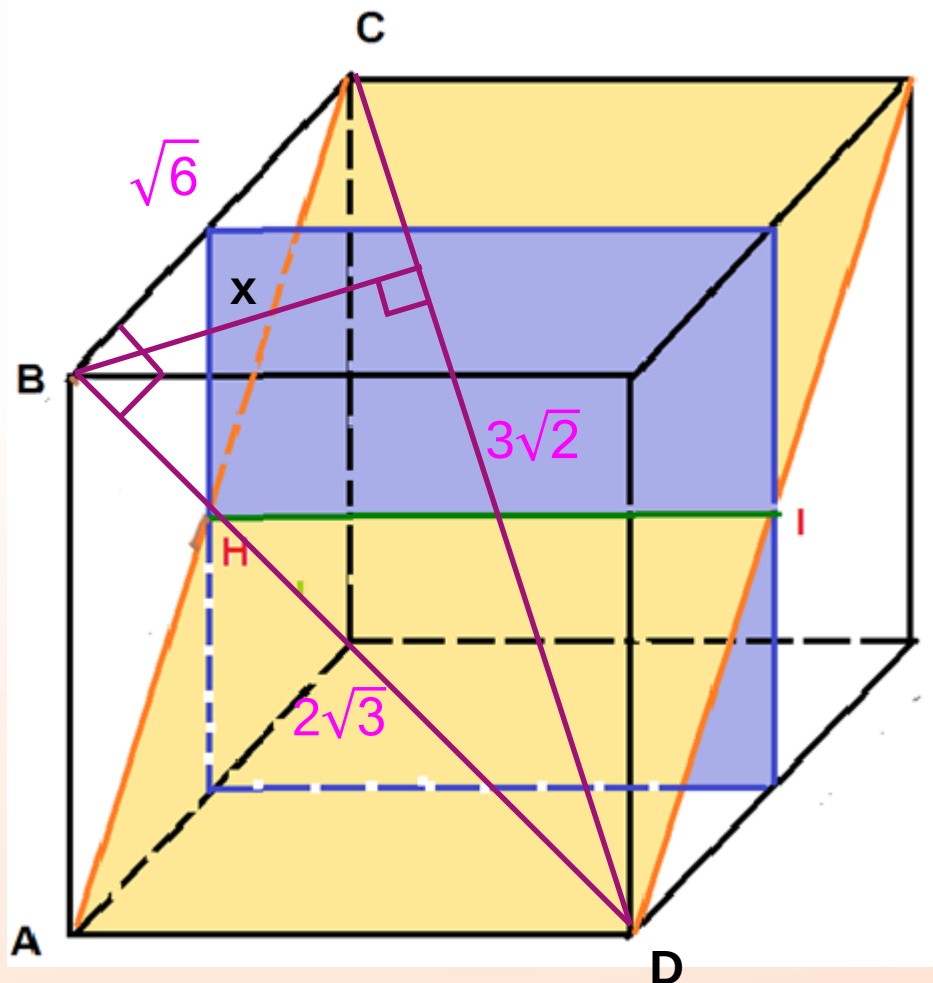
C) 1,5

D) 2,5

E)  $\sqrt{3}$

## RESOLUCIÓN 06

Si la longitud de la intersección de dos tipos diferentes de planos de simetría de un hexaedro regular es  $\sqrt{6} u$ , calcule la distancia (en  $u$ ) de un vértice del hexaedro a una diagonal que no la contiene.



En el hexaedro HI es la recta de intersección, tal que  $HI = AB = BC = \sqrt{6}$

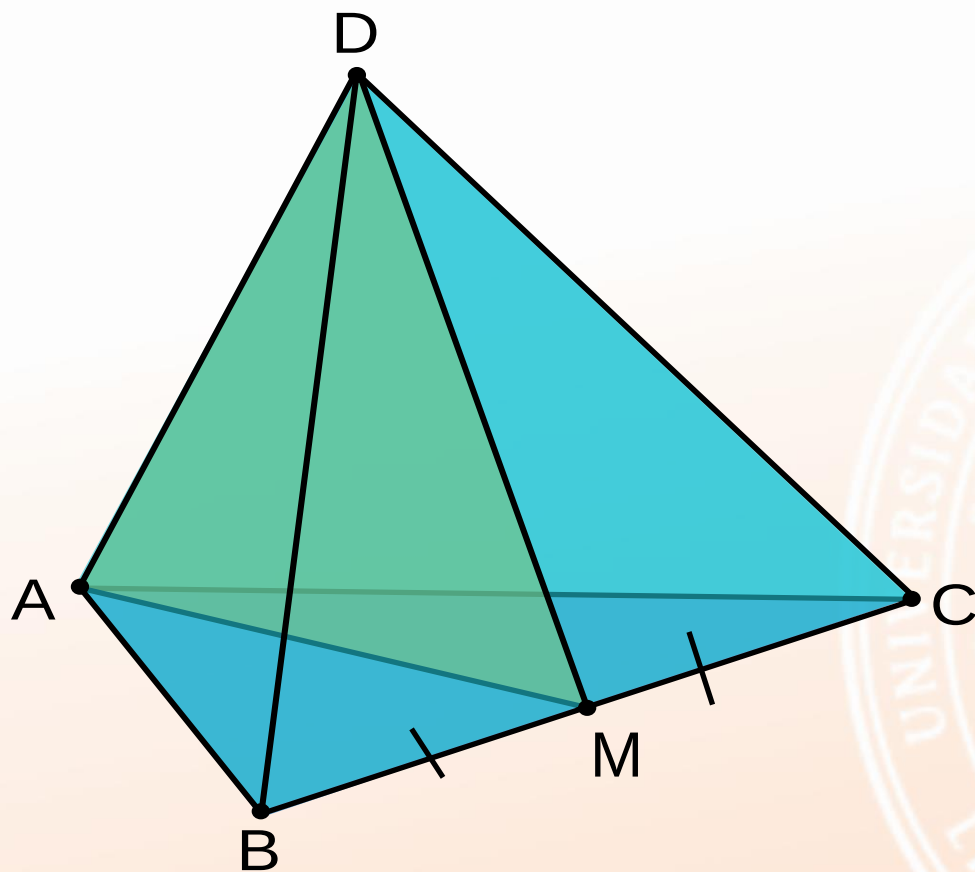
En el triángulo BCD (Relaciones Métricas)

$$(x)(3\sqrt{2}) = (\sqrt{6})(2\sqrt{3})$$

$$x = 2$$

Clave: B

# PLANOS DE SIMETRIA EN UN TETRAEDRO REGULAR



El tetraedro regular  $ABCD$ , es simétrico con respecto al plano que contiene a una arista y el punto medio de la arista opuesta.

El tetraedro regular tiene 6 aristas y los respectivos puntos medios de las aristas opuestas.

El tetraedro regular tiene 6 planos de simetría

## PROBLEMA 07

En un tetraedro regular A–BCD, la arista mide  $\ell$ . Calcule el área de la sección que determina en el tetraedro, un plano de simetría.

A)  $\frac{\ell^2}{32} \sqrt{2}$

D)  $\frac{\ell^2}{4} \sqrt{2}$

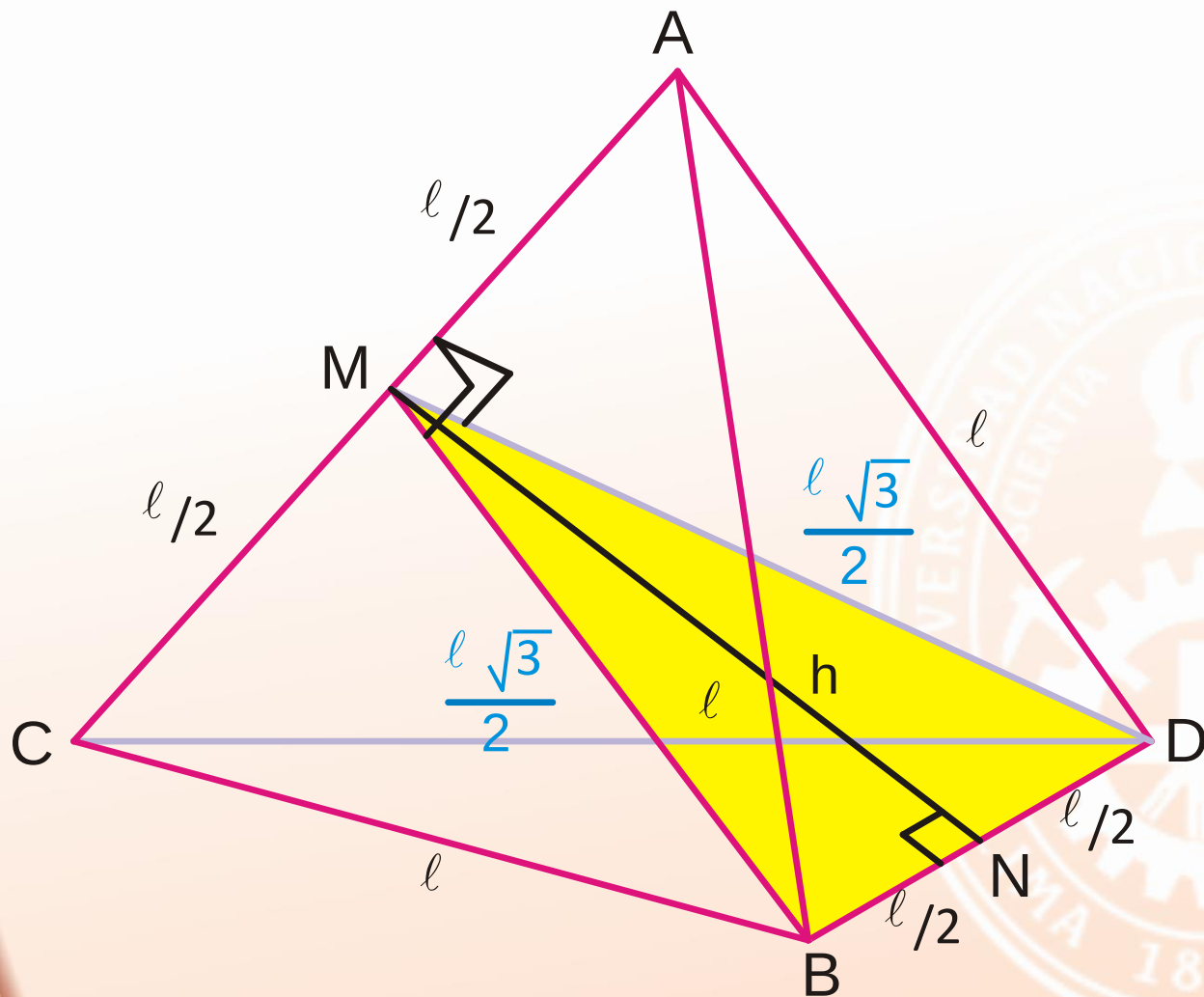
B)  $\frac{\ell^2}{16} \sqrt{2}$

E)  $\frac{\ell^2}{2} \sqrt{2}$

C)  $\frac{\ell^2}{8} \sqrt{2}$

# RESOLUCIÓN 07

En un tetraedro regular A-BCD, la arista mide  $\ell$ . Calcule el área de la sección que determina en el tetraedro, un plano de simetría.



Calcule  $A_{\Delta BMD}$

$\Delta ADC$ : Equilátero

$$AM = MC = \ell/2 \quad MD = MB = \frac{\ell}{2} \sqrt{3}$$

$\Delta BMD$ : Isósceles  $BN = ND = \ell/2$

$\Delta BNM$ : Teorema de Pitágoras

$$h = \frac{\ell}{2} \sqrt{2}$$

$$A_{\Delta BMD} = \frac{(\ell) \left( \frac{\ell}{2} \sqrt{2} \right)}{2}$$

$$\therefore A_{\Delta BMD} = \frac{\ell^2 \sqrt{2}}{4}$$

Clave: D

## PROBLEMA 08

Indique el valor de verdad de cada proposición:

- I. Todo poliedro regular tiene centro de simetría.
- II. El hexaedro regular tiene solo 6 ejes de simetría.
- III. El tetraedro regular tiene solo 4 planos de simetría.

A) FVF

B) VFV

C) FFF

D) VVV

E) VVF

ce  
pre  
UNI

## RESOLUCIÓN 08

Indique el valor de verdad de cada proposición:

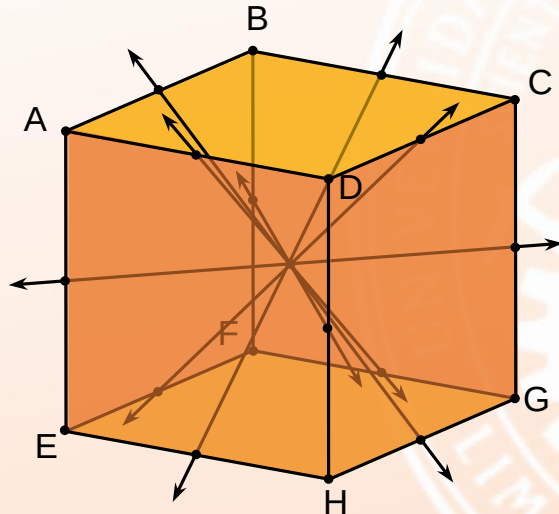
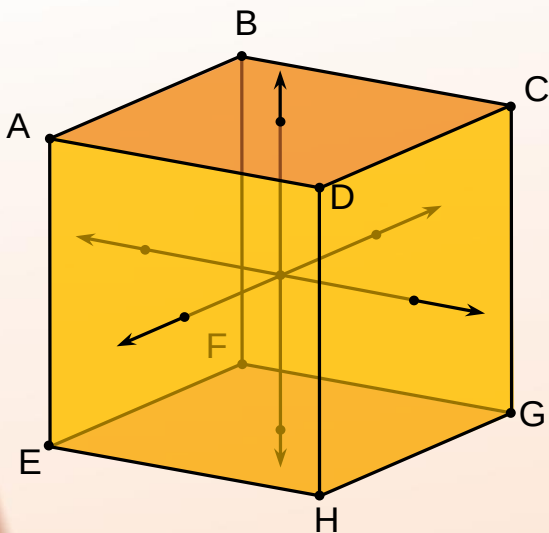
- I. Todo poliedro regular tiene centro de simetría.
- II. El hexaedro regular tiene solo 6 ejes de simetría.
- III. El tetraedro regular tiene solo 4 planos de simetría.

I. El tetraedro regular no tiene centro de simetría.

**FALSO**

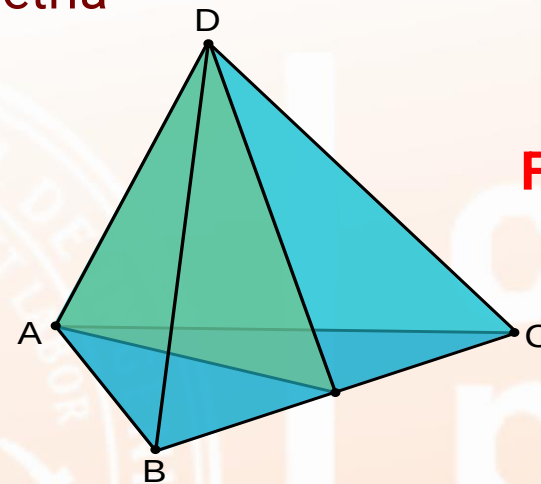
II. El hexaedro regular tiene 9 ejes de simetría.

**FALSO**



III. El tetraedro regular tiene 6 planos de simetría

**FALSO**



El tetraedro regular ABCD es simétrico respecto al plano que contiene a una arista y el punto medio de la arista opuesta.

**Clave: C**



ce  
pre  
UNI

Geometría

**GRACIAS**



ce  
pre  
UNI